Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Matematika (JP2M) *ISSN*
Vol. 2 No. 1 Maret 2016 *2460-7800*

KONSTRUKSI BARU UNTUK TRIPEL PYTHAGORAS

Moh. Affaf
STKIP PGRI Bangkalan
E-mai: affafs.theorem@yahoo.com

Abstract: *several years ago , was known that Pythagorean Triples can be constructed by* $[x, y]$*, that is* $[x, y] = (x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$*. However, the construction still have at least two deficiency, that is The construction still needs to pay attention to the order of the sides of the upright and can not produce all the existing Pythagorean Triples. In this paper, will be discussed about new construction to triple Pythagoras who can produce all the desired triple Pythagoras and construction also does not require the order of the sides of the upright.*

Keywords*:pythagorean's theorem, pythagorean's triples, construction to pythagorean's triples.*

Abstrak:*Bertahun-tahun yang lalu, telah diketahui bahwa Tripel Pythagoras dapat dikonstruksi dengan konstruksi* $[x, y]$*, yaitu* $[x, y] = (x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$*. Namun, konstruksi ini masih memiliki sedikitnya dua kekurangan, yaitu konstruksi ini masih perlu memperhatikan urutan dari sisi-sisi tegakya dan konstruksi ini tidak bisa memproduksi semua tripel pythgoras yang ada. Dalam penelitian ini, akan dibahas tentang konstruksi baru untuk tripel pythagoras yang dapat memproduksi semua tripel pythagoras yang diinginkan dan konstruksi ini juga tidak memerlukan urutan dari sisi-sisi tegaknya.*

Keyword *: teorema pythagoras, tripel pythagoras, konstruksi tripel pythagoras*

PENDAHULUAN

Salah satu tokoh penting dalam Matematika, khusunya cabang geometri adalah ilmuan asal Yunani, *Pythagoras.* Salah satu temuan penting Pythagoras yang masih diperbincangkan hingga saat ini oleh para ilmuwan matematika adalah *Teorema Pythagoras* tentang hubungan sisi-sisi tegak segitiga siku-siku dengan *hepotenusa*-nya. Ketiga sisi segitiga tersebut selanjutnya disebut *Triple Pythagoras* dalam kasus ketiganya adalah bilangan bulat. Salah satu bukti bahwa para pakar matematika masih tertarik dengan teorema ini adalah sampai saat ini para pakar masih terus mencari dan memberikan bukti yang menawan untuk teorema pythagoras ini.

Salah satu bahasan penting dalam teorema pythagoras adalah *Primitive Triple Pythagoras*. Primitive tripel pythagoras ialah gagasan tentang triple pythagoras sedemikian hingga ketiga panjang sisi segitiga siku-siku tersebut faktor pembagi bersama terbesarya adalah 1. Salah satu ciri yang diberikan oleh peneliti tentang primitif tripel pythagoras adalah hepotenusanya harus merupakan jumlah kuadrat dari bilangan asli. Lebih jelasnya, (a, b, c) adalah primitif tripel pythagoras jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat x dan y yang prima relatif dan berbeda paritas sehingga $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, dan $c = x^2 + y^2$. Sampai saat ini, masih banyak penelitian tentang primitif tripel pythagoras, terutama dalam hal ciri atau karakteristiknya. Salah satunya yang dilakukan oleh Leyendekkers.

Jika lebih diperhatikan lagi, konstruksi primitif tripel pythagoras yang menyatakan "(a, b, c) adalah primitif tripel pythagoras jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat x dan y yang prima relatif dan berlainan tanda sehingga $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, dan $c = x^2 + y^2$" belum mencakup semua tripel pythagoras meskipun "x dan y adalah prima relatif" atau "x dan y berbeda paritas" tidak dipenuhi. Hal ini mudah dilihat dari nilai $c + b$ yang selalu merupakan bilangan kuadrat sempurna. Sebagai contoh, tripel pythagoras $(9,12,15)$ bukan tripel pythagoras dari konstruksi $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ untuk sebarang bilangan bulat x dan y.

METODE

Penelitian ini direncanakan dalam tiga tahapan yaitu tahap *inisisasi*, *investigasi*, dan *pengembangan*. Hal yang akan dilakukan pada tahap inisiasi adalah

a. Pengkajian literatur terutama tentang bukti konstruksi $[x, y]$ sebagai dasar untuk mempelajari pengkonstruksian tripel pythagoras. Literatur yang digunakan seperti: Weisbord (2009), Khosy (2007), Dominic & Vella (2006), McCullough (2005), dan Wegener (2000).

b. Mempelajari kembali syarat-syarat yang harus dipenuhi dalam pengkonstruksian $[x, y]$.

Sedangkan pada tahap investigasi yang dilakukan adalah

a. Penyelidikan tentang syarat pengkonstruksian $[x, y]$ yang masih perlu ditinjau ulang berkenaan dengan tripel pythagoras yang dapat dikonstruksinya.

b. Mengkaji lebih lanjut sifat-sifat struktural lain yang berguna bagi pengembangan generalisasi untuk konstruksi yang lebih baik.

c. Merancang konstruksi yang nantinya bisa menutupi kekurangan konstruksi $[x, y]$.

Pada tahap pengembangan hal yang akan dilakukan adalah

a. Menyusun hasil temuan di atas untuk mendapatkan konstruksi baru yang lebih baik.

b. Menyusun langkah-langkah dalam pengonstruksian yang baru tersebut sehingga dapat dilihat secara jelas hasil konstruksinya.

c. Menggunakan konstruksi yang baru ini untuk memproduksi ataupun menemukan tripel pythagoras yang tak dapat dihasilkan atau ditemukan oleh konstruksi $[x, y]$.

HASIL PENELITIAN

Pada bagian ini, akan dibahas tentang pembentukan konstruksi $[x, y]$ yang nantinya bisa dijadikan perbandingan dengan konstruksi baru yang akan dibentuk pada Hasil dan Pembahasan. Untuk mengawali bagian ini, akan perkenalkan tentang definisi Tripel Pythagoras

Definisi 3.1 (Primitif Tripel Pythagoras)

Diberikan bilangan asli a, b, dan c. Maka (a, b, c) dikatakan primitif tripel pythagoras jika dan hanya jika memenuhi dua kondisi berikut :

1. $a^2 + b^2 = c^2$
2. $FPB(a, b, c) = 1$

Jika (a, b, c) hanya memenuhi kondisi satu saja, kita sebut (a, b, c) sebagai tripel pythagoras.

Contoh 3.1

$(3,4,5)$ adalah primitif tripel pythagoras karena

1. $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$,
2. $FPB(3,4,5) = 1$.

Namun, $(15,20,25)$ bukan primitif tripel pythagoras, karena meskipun $(15,20,25)$ memenuhi kondisi pertama, namun $(15,20,25)$ tidak memenuhi kondisi kedua. Lebih jelasnya, $FPB(15,20,25) = 5 \neq 1$. Selain itu, $(4,5,6)$ bukan primitif tripel pythagoras, karena meskipun $(4,5,6)$ memenuhi kondisi kedua, namun $(4,5,6)$ tidak memenuhi kondisi pertama. Lebih jelasnya, karena diketahui $4^2 + 5^2 = 41 \neq 36 = 6^2$.

Dari Definisi 3.1, untuk mengetahui tripel pythagoras adalah primitif tripel pythagoras atau bukan, harus diperiksa apakah FPB dari ketiga bilangan tersebut 1 atau bukan. Dari sini, Lemma sebagai berikut memberikan informasi tentang dua bilangan dari primitif tripel pythagoras.

Lemma 3.1

Jika (a, b, c) adalah primitif tripel pythagoras, maka$FPB(a, b) = FPB(b, c) = FPB(a, c) = 1$

Bukti.

Andaikan $FPB(a,b) = d > 1$ tetapi (a,b,c) adalah primitif tripel pythagoras. Misalkan p adalah bilangan prima yang membagi d. Karena (a,b,c) adalah primitif tripel pythagoras, maka berlaku $a^2 + b^2 = c^2$

Karena p habis membagi a dan p habis membagi b, maka p akan habis membagi semua kombinasi linear dari a dan b. Karena $a^2 + b^2$ adalah salah satu kombinasi linear dari a dan b, maka p habis membagi $(a^2 + b^2)$, yaitu p habis membagi c^2. Oleh karena itu p habis membagi c. Karena p habis membagi a, p habis membagi b, dan p habis membagi c, maka haruslah $FPB(a,b,c) \geq p$. Dilain pihak p selalulebih besar daripada 1. Maka $FPB(a,b,c) \geq p$ kontradiksi dengan (a,b,c) adalah primitif tripel pythagoras. Jadi haruslah $FPB(a,b) = 1$.

■

Lemma berikut menunjukkan bahwa a dan b dari primitif tripel pythagoras tepat satu diantaranya adalah bilangan genap. Dalam hal dua bilangan asli tepat satu diantaranya adalah genap, maka dua bilangan tersebut dikatakan *berbeda paritas*.

Lemma 3.2

Jika (a,b,c) adalah primitif tripel pythagoras, maka a dan b berbeda paritas.

Bukti.

Misalkan (a,b,c) adalah primitif tripel pythagoras. Jika a dan b semuanya genap, tentu saja hal ini tidak mungkin, karena kuadrat dari bilangan genap adslsh bilangan genap dan jumlah dari dua bilangan genap bilangan genap. Jadi akan dijumpai $FPB(a,b,c) \geq 2 > 1$.

Sekarang. Andaikan a dan b keduanya ganjil. Karena kuadrat dari suatu bilangan asli x hanya ada dua kemungkinan di modulo 4, yaitu, $x^2 \equiv 1(mod 4)$ jika x ganjil dan $x^2 \equiv 0(mod\ 4)$ jika x genap, maka $a^2 \equiv 1(mod\ 4)$ dan $b^2 \equiv 1(mod\ 4)$. Oleh karena itu, $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2(mod\ 4)$. Hal ini kontradiksi dengan teorema "suatu bilangan asli x hanya ada dua kemungkinan di modulo 4, yaitu, $x^2 \equiv 1(mod 4)$ jika x ganjil dan $x^2 \equiv 0(mod\ 4)$ jika x genap". Jadi haruslah salah satu dari a atau b adalah genap. Dengan kata lain, a dan b harusla berbeda paritas.

■

Berdasarkan Lemma 3.2 di atas, karena salah satu dari a dan b adalah bilangan genap dengan (a,b,c) adalah primitif tripel pythagotras, mka untuk penulisan selanjutnya, bilangan yang genap diletakkan pada entri yang kedua.

Sebagai contoh, untuk primitif tripel pythagoras $(4,3,5)$ dituliskan sebagai $(3,4,5)$. Penulisan ini semakin didukung oleh Akibat 3.1 berikut yang merupakan akibat dari Lemma 3.2, karena c juga akan bernilai ganjil.

Akibat 3.1

Misalkan (a, b, c) adalah tripel primitif pythagoras, maka a dan c pasti ganjil.

Bukti.

Karena b genap dan (a, b, c) adalah tripel primitif pythagoras, maka a ganjil menurut Lemma 3.2. Selanjutnya, karena kuadrat dari bilangan ganjil adalah bilangan ganjil dan kuadrat dari bilangan genap adalah bilangan genap, maka a^2 bilangan ganjil dan b adalah bilangan genap, Selanjutnya, karena jumlah dari bilangan ganjil dan bilnagan genap adalah bilangan ganjil, maka $c^2 = a^2 + b^2$ adalah bilangan ganjil. Karena c^2 bilangan ganjil, mkaa haruslah c merupakan bilangan ganjil.

■

Sebelum menuju pada formula untuk primitif tripel pythagoras, masih diperlukan satu lemma lagi. Lemma berikut dibuktikan dengan menggunakan teorema fundamental aritmatika.

Lemma 3.3

Diberikan bilangan asli r dan s dengan $FPB(r, s) = 1$. Jika rs adalah bilangan kuadrat sempurna, maka r dan s keduanya adalah bilangan kuadrat sempurna.

Bukti.

Misalkan faktorisasi prima dari r adalah $r = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}.p_3^{k_3} \dots p_t^{k_t}$ dan faktorisasi prima dari s adalah $s = q_1^{n_1}.q_2^{n_2}.q_3^{n_3} \dots q_m^{n_m}$,dimana $k_i, n_j \geq 1$ untuk setiap i dan j, p_u prima berbeda untuk setiap $u = 1,2,3, \dots, t$, dan q_v prima berbeda untuk setiap $v = 1,2,3, \dots, m$. Karena $FPB(r, s) = 1$, maka semua faktor prima dari r berbeda dengan semua faktor prima dari s. Dilain pihak,

$$rs = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}.p_3^{k_3} \dots p_t^{k_t}.q_1^{n_1}.q_2^{n_2}.q_3^{n_3} \dots q_m^{n_m}$$

adalah bilangan kuadrat sempurna. Karena faktor prima dari r dan s semuanya berbeda serta p_u dan q_v berbeda berturut-turut untuk setiap $u = 1,2,3, \dots, t$ dan $v = 1,2,3, \dots, m$, maka haruslah k_u dan n_v bernilai genap untuk setiap nilai $u = 1,2,3, \dots, t$ dan $v = 1,2,3, \dots, m$, berturutan. Oleh karena itu r dan s keduanya adalah bilangan kuadrat sempurna.

■

Setelah menetapkan Lemma 3.3 di atas, selanjutnya teorema berikut akan menetapkan hasil utama dari bab 3 ini, yaitu konstruksi untuk primitif tripel pythagoras. Konstruksi ini dimulai dengan Teorema 3.1 berikut.

Teorema 3.1

Jika (a, b, c) adalah primitif tripel pythagoras, maka terdapat bilangan asli m dan n yang relatif prima yanag sekaligus bebrbeda paritas dengan $m > n$ sehingga $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, dan $c = m^2 + n^2$

Bukti.

Telah ditetapkan sebelumnya, entri kedua dari (a, b, c) dalah bilangan genap, ini artinya b genap. Berdasarkan Akibat 3.1, maka a dan c adalah bilangan ganjil. Oleh karena itu, $c + a$ dan $c - a$ keduanya genap.

Sekarang, misalkan $c + a = 2u$ dan $c - a = 2v$, untuk suatu bilangan asli u dan v. Karena (a, b, c) tripel pythagoras, maka

$$a^2 + b^2 = c^2$$

yaitu

$$b^2 = (c + a)(c - a) = 4uv$$

yang artinya

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = uv$$

Karena b genap, maka $\frac{b}{2}$ adalah bilangan asli. Oleh karena itu uv adalah bilangan kuadrat sempurna. Berdasarkan Lemma 3.3, maka u dan v keduanya bilangan kuadrat sempurna. Misalkan $u = m^2$ dan $v = n^2$ untuk suatu bilangan asli m dan n. Dari persamaan $b^2 = 4uv$, mkaa mudah disimpulkan bahwa $b = 2mn$. Selanjutnya, dari persamaan $c + a = 2u$ dan $c - a = 2v$, maka mudah diketahui pula bahwa $a = m^2 - n^2$ dan $c = m^2 + n^2$. Tentu saja m lebih besar daripada n karena a adalah bilangan asli.

Selanjutnya, Misalkan $d = FPB(m, n)$. Karena d membagi m, mka d membagi m^2, yang artinya d membagi u serta karena d membagi n, mka d membagi n^2, yang artinya d membagi v. Selanjutnya, karena d membagi m dan n, maka d membagi $FPB(u, v) = 1$. Dari sini, dapat disimpulkan bahwa $d = 1$. Jadi m dan n relatif prima.

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa m dan n berbeda paritas. Jika m dan n genap, jelas hal ini tidak mungkin karena akan kontradiksi dengan a dan c ganjil. Begitu pula, Jika m dan n ganjil, hal ini juga tidak mungkin karena juga akan kontradiksi dengan a dan c ganjil. Jadi haruslah m dan n berbeda paritas.

■

Pernyataan Teorema 3.1 tidak cukup baik untuk mengkarakterisasi atau mengkonstruksi primitif tripel pythagoras jika konvers dari pernyataan tersebut tidak berlaku. Teorema 3.2 berikut menyatakan bahwa konvers dari pernyataan Teorema 3.1 juga berlaku.

Teorema 3.2

Jika m dan n bilangan relatif prima yang berbeda paritas, maka (a, b, c) primitif tripel pythagoras, dimana $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, dan $c = m^2 + n^2$

Bukti.

Misalkan $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, dan $c = m^2 + n^2$, maka

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= (m^4 - 2m^2n^2 + n^4) \\ &\quad + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa (a, b, c) adalah tripel pythagoras. Selanjutnya, tinggal menunjukkan $FPB(a, b, c) = 1$. Dengan kata lain, tinggal menunjukkan bahwa (a, b, c) adalah primitif, yaitu ketiga bilangan ini saling relatif prima.

Untuk menunjukkan $FPB(a, b, c) = 1$, akan digunakan bukti kontadiksi. Andaikan $FPB(a, b, c) = d > 1$. Misalakn p adalah faktor prima dari *d.* Karena d membagi a dan d membagi c, maka p membagi a dan p membagi c. Dilain pihak, karena m dan n berbeda paritas, tentu saja a dan c keduanya adalah bilangan ganjil. Hal ini berakibat $p \neq 2$. Selanjutnya, karena p membagi a dan p membagi c, maka p membagi $c + a = 2m^2$ dan p membagi $c - a = 2n^2$. Karena $p \neq 2$, mka hariuslah p membagi m^2 dan p membagi n^2. Lebih khusus, p membagi m dan p membagi n. Hal ini berakibat, FPB dari m dan n setidaknya adalah p. Hal ini kontradiksi dengan m dan n relatif prima. Jadi, haruslah $d = 1$. Dengan kata lain, haruslah $FPB(a, b, c) = 1$, yaitu (a, b, c) adalah primitive tripel Pythagoras.

■

Selanjutnya, dari Teorema 3.1 dan Teorema 3.2, diperoleh sebuah teorema fundamental dalam studi primitif tripel pythagoras yang merupakan akibat dari Teorema 3.1 dan Teorema 3.2.

Teorema 3.3

Untuk bilangan asli a, b, dan c, 3-tupel (a, b, c) merupakan primitif tripel Pythagoras jika dan hanya jika terdapat bilanagn asli m dan n yang relative prima dan sekaligus berbeda paritas sehingga $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, dan $c = m^2 + n^2$.

Jika lebih diperhatikan lagi, konstruksi primitif tripel pythagoras pada Teorema 3.3 yang menyatakan "(a, b, c) adalah primitif tripel pythagoras jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat x dan y yang prima relatif dan berlainan tanda sehingga $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, dan $c = x^2 + y^2$" belum mencakup semua tripel pythagoras meskipun "x dan y adalah prima relatif" atau "x dan y berbeda paritas" tidak dipenuhi. Hal ini mudah dilihat dari nilai $c - b$ yang selalu merupakan bilangan kuadrat sempurna. Sebagai contoh, tripel pythagoras $(9,12,15)$ bukan merupakan tripel pythagoras dari konstruksi $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ untuk sebarang bilangan bulat x dan y.

Oleh karena itu, sangat memungkinkan untuk menemukan suatu konstruksi yang mencakup semua tripel pythagoras tanpa terkecuali. Untuk bab selanjutnya, akan dibahas tentang konstruksi tripel pythagoras yang mencakup semua tripel pythagoras tanpa terkecuali.

Hal yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah mencari konstruksi tripel pythagoras yang mencakup semua tripel pythagoras tanpa terkecuali. Adapun langkah analisisnya adalah sebagai berikut.

a. Misalkan x dan y adalah bilangan bulat positif dengan x lebih dari y, maka dapat dipastikan bahwa $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ adalah tripel pythagoras.

b. Jika x dan y prima relatif dan berbeda paritas, maka $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ adalah primitif tripel pythagoras.

c. Jika "x dan y prima relatif" atau "x dan y berbeda paritas" tidak terpenuhi, maka maka akan kembali pada poin pertama, yaitu $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ adalah tripel pythagoras.

d. Meskipun poin ketiga menyebabkan $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ adalah tripel pythagoras, tidak semua tripel pythagoras dapat dinyatakan dalam bentuk $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$. Salah satu contohnya adalah $(9,12,15)$. Tidak ada bilangan bulat positif x dan y dengan x lebih dari y sehingga berlaku $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2) = (9,12,15)$.

e. Poin keempat terjadi karena jika (a, b, c) adalah tripel pythagoras yang terbentuk dari $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$, maka $c - b$ adalah $x^2 - 2xy + y^2$, yaitu $(x - y)^2$. Dengan kata lain, $c - b$ adalah bilangan kuadrat sempurna. Padahal, $15 - 12 = 3$, bukan bilangan kuadrat sempurna. Oleh karena itu, mudah disimpulkan bahwa $(9,12,15)$ bukan tripel pythagoras hasil konstruksi $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$.

f. Selanjutnya, misalkan (a, b, c) adalah tripel pythagoras dan $c - b = K$, maka

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 = c^2 &= (K + b)^2 \\
&= K^2 + 2Kb + b^2
\end{aligned}
$$

Dari disini diperoleh $a^2 = K^2 + 2Kb$. Dengan kata lain, $= \frac{a^2-K^2}{2K}$. Oleh karena itu, $= K + b = K + \frac{a^2-K^2}{2K}$. Jadi tripel pythagoras (a, b, c) dapat dituliskan menjadi $\left(a, \frac{a^2-K^2}{2K}, K + \frac{a^2-K^2}{2K}\right)$ jika $2k$ habis membagi $a^2 - K^2$. Jadi, perlu diidentifikasi kapan $2k$ membagi $a^2 - K^2$ agar tripel $\left(a, \frac{a^2-K^2}{2k}, k + \frac{a^2-K^2}{2k}\right)$ merupakan tripel pythagoras.

g. Misalkan K dituliskan sebagai $K = L.I^2.N$ dimana

L adalah hasil kali semua faktor prima ganjil tunggal dari K, I^2 adalah hasil kali faktor-faktor dengan pangkat genap dari K, dan N adalah sisanya. Sebagai contoh, Jika $K = 540000 = 5^4 \times 3^3 \times 2^5$, maka $L = 5 \times 3 = 15$. Jadi yang tersisa dari K setelah L terbentuk adalah $2^5 \times 3^2 \times 5^3$. Selanjutnya, dari sisa tersebut diperoleh $I^2 = (2^2 \times 3 \times 5)^2$. Sekarnag yang tersisa dari K setelah terbentuknya I^2 adalah 2×5. Maka diperoleh $N = 2 \times 5 = 10$.

h. Setelah membentuk $K = L \times I^2 \times N$, definisikan $M = 2 \times L \times I$. Jadi, dari K pada poin 7, diperoleh $A = 2 \times 15 \times 60 = 1800$.

Perhatikan bahwa $M^2 = 2^2 \times L^2 \times I^2 = L \times I^2 \times 2 \times 2L$. Selanjutnya, karena N adalah sisa-sisa dari L dan I^2, maka dengan memperhatikan definisi L dan I^2, dapat disimpulkan bahwa $2L$ habis dibagi N. Dengan kata lain, ada bilangan bulat t sehingga $2L = N.t$. Selanjutnya, M^2 dapat dituliskan menjadi $M^2 = L \times I^2 \times 2 \times N.t = 2.L \times I^2 \times N.t = 2K.s$. Dari sini dapat disimpulkan bahwa $2K$ habis membagi M^2.

i. Selanjutnya, dengan menuliskan a sebagai $M.t + K$, maka diperoleh hasil yang diinginkan, yaitu

$$\begin{aligned} a^2 - K^2 &= (M.t + K)^2 - K^2 \\ &= M^2.t^2 + 2KMt \end{aligned}$$

Habis dibagi $2K$.

j. Jadi, $\left(a, \frac{a^2-K^2}{2k}, k + \frac{a^2-K^2}{2k}\right)$ merupakan tripel pythagoras jika terdapat bilangan bulat postif t sehingga $= Mt + K$. Dengan kata lain, semua tripel pythagoras (a, b, c) adalah hasil konstruksi $[K, M, t]$, yaitu

$$[K, M, t] = \left(Mt + K, \frac{(Mt)^2}{2K} + Mt, \frac{(Mt)^2}{2K} + Mt + K\right)$$

k. Proses mencari $[K, M, t]$ adalah sebagai berikut. Dari tripel pythagoras (a, b, c), diperoleh $K = c - b = L \times I^2 \times N$. Setelah mendapatkan L, I^2, dan N dari K, maka diperoleh M, yaitu $M = 2 \times L \times I$. Dari M, K, dan tripel (a, b, c) diperoleh $t = \frac{a-K}{M}$. Sebagai contoh, untuk tripel pythagoras $(9,12,15)$, diperoleh $K = 15 - 12 =$

$3 = 3 \times 1^2 \times 1$. Dari sini diperoleh $M = 2 \times 3 = 6$. Sehingga diperoleh $t = \frac{9-3}{6} = 1$. Jadi tripel pythagoras $(9,12,15)$ adalah hasil produksi tripel $[3,6,1]$.

KESIMPULAN

Penelitian ini telah berhasil menemukan konstruksi baru, yaitu konstruksi $[K, M, t]$, konstruksi yang lebih baik dari konstruksi $[x, y]$. konstruksi $[K, M, t]$ ini memiliki dua keunggulan dibangdingkan dengan konstruksi $[x, y]$ dapat memproduksi semua tripel pythagoras yang diinginkan dan konstruksi ini juga tidak memerlukan urutan dari sisi-sisi tegaknya.

Adapun saran penelitian ke depannya, diharapkan konstruksi ini dapat dikembangkan sehingga langkah-langkah konstruksinya dapat lebih sederhana.

DAFTAR PUSTAKA

Dominic and Vella. 2006. *When is n a member of a Pythagorean Triple*.

Khosy, Thomas. 2007. *Elementary number theory with applications*. Amsterdam. Elsivier

Leyendekkers, J.V. and Rybak, J., Pellian Sequences Derived from Pythagorean Triples, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1464 – 5211, Vol. 26, Issue 6, pg 903 – 922, 1995

Leyendekkers, J.V. and Rybak, J., The Generation and Analysis of Pythagorean Triples within a Two-Parameter Grid, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 26, Issue 6, pg 787 – 793, 1995

McCullough, D., Height and Excess of Pythagorean Triples, Mathematics Magazine, Vol. 78, No. 1, pg 26 – 44, February 2005

Wegener, D. P. 2000. *Primitive Pythagorean Triples With Sum Or Difference Of Legs Equal To A Prime**. Ohio university

Weisbrod, J., Exploring a Pythagorean Ternary Tree, annual meeting of the Mathematical Association of America MathFest, August 6, 2009