Eduproxima: Jurnal Ilmiah Pendidikan IPA
http://jurnal.stkippgritulungagung.ac.id/index.php/eduproxima

KAJIAN GERAK PELURU DENGAN PERSAMAAN LAGRANGIAN

Ellyani Eka Putri *[1], Roidah Salma [2], Cica Sutantri [3], Bambang Supriadi [4], Nila Mutia Dewi [5]
[1,2,3,4,5] Prodi Pendidikan Fisika, FKIP, Universitas Jember
e-mail: ellyani.ep16@email.com [1], almaroipratama20@email.com [2], iechastan4@email.com [3], bambangsupriadi.fkip@unej.ac.id [4] nilamutia@unej.ac.id
** Corresponding author*

Received: June 15th, 2023; Revised: July 17th, 2023; Accepted: Aug. 18th, 2023; Published: January 04th, 2024

ABSTRAK

Gerak peluru merupakan gerak yang bentuk lintasannya berbentuk seperti parabola. Gerak ini memadukan dua sumbu yakni sumbu horizontal dan vertikal. Metode lagrange merupakan metode yang terdiri dari energi kinetik dan. Posisi dan kecepatan merupakan perumusan yang digunakan dalam koordinatnya. Kajian gerak peluru menggunakan lagrangian sangat penting digunakan dalam menganalisis gaya yang tidak memungkinkan. Sehingga, dalam hal ini perlunya pengkajian gerak peluru menggunakan lagrangian. Dalam penelitian ini digunakan perhitungan numerik. Adapun pendekatan yang dilakukan ialah studi pustaka. Hasil perhitungan gerak peluru khususnya pada persamaan Lagrangian diperoleh hasil, dimana gerak peluru dengan tiga sumbu dapat dikaji atau dianalisis menggunakan lagrangian, untuk gerak yang searah sumbu x dan sumbu y atau arah gerak horizontal (tidak terpengaruh oleh gaya gravitasi) dan tidak memiliki percepatan sehingga mengalami gerak lurus beraturan (GLB). Sedangkan pada sumbu z, dipengaruhi oleh gaya gravitasi sehingga mengalami gerak lurus berubah beraturan (GLBB).

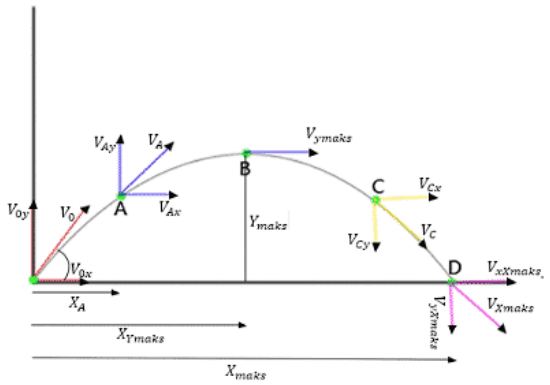
Kata Kunci : gerak parabola; lagrangian; fisika

PENDAHULUAN

Gerak peluru ialah sebuah gerak dimana bentuk lintasannya seperti parabola. Gerak ini memadukan dua sumbu yakni sumbu horizontal dan vertikal (Abdullah, 2016). Dalam hal ini, pada sumbu horizontal berlangsung Gerak Lurus Beraturan (GLB), sedangkan pada sumbu vertikal berlangsung Gerak Lurus Berubah Beraturan (Purwadi & Ishafit, 2014). Gerak peluru selalu memiliki kecepatan awal. Meskipun demikian, bukan berarti tiap gerakan yang memiliki kecepatan awal termasuk dalam gerak parabola. Gerak peluru merupakan suatu gerak dimana benda diberikan kecepatan awal dan bergerak dalam sebuah lintasan yang dipengaruhi oleh gaya gravitasi bumi dan lintasannya berbentuk seperti parabola. Penerapan gerak peluru ini salah satunya dapat dilihat pada lintasan peluru meriam dimana dalam hal ini adanya efek hambatan udara diabaikan, karena efek dari percepatan gravitasi juga berpengaruh. Sehingga efek dari perbedaan percepatan gravitasi memiliki pengaruh yang sangat kecil untuk jarak horizontal bumi tanpa adanya hambatan udara, pengecualian jika adanya hambatan udara. Efek lengkung pada lintasan peluru merupakan efek yang diberikan oleh percepatan gravitasi, dimana semakin kecil nilai percepatan gravitasi, lintasan peluru akan linier (Pradhana, 2019).

Gambar 1. Lintasan meriam peluru

Percepatan gravitasi memiliki nilai terendah dan tertinggi (Hirt et al., 2013). Terdapat beberapa faktor terhadap benda-benda yang mengalami gerak peluru, yakni: Karena adanya gaya yang diberikan pada benda tersebut agar bergerak, adanya pengaruh gravitasi, dan gesekan udara atau hambatan (Sari & Prihanto, 2013). Dengan jarak dan tinggi benda merupakan komponen dalam gerak peluru atau gerak parabola (Rajagukguk & Sarumaha, 2017). Bentuk lintasan gerak peluru dipengaruhi oleh gravitasi bumi, kecepatan, dan sudut elevasi (Harefa et al., 2020).



Gambar 2. Gerak peluru/parabola

Secara matematis rumus kecepatan gerak parabola pada sumbu x ditulis sebagai berikut:

$$V_{ox} = V_x = V_0 \cos\alpha \qquad (1)$$

Sedangkan kecepatan pada sumbu y,

$$V_{oy} = V_0 \sin\alpha$$
$$V_y = V_{0y} - gt$$
$$V_y = V_0 \sin\alpha - gt \qquad (2)$$

Dengan rumus titik maksimumnya ialah,

$$y_{maks} = \frac{V_0^2 sin^2\alpha}{2g} \qquad (3)$$

Jarak terjauh gerak peluru,

$$x_{maks} = \frac{V_0^2 sin^2\alpha}{2g} \qquad (4)$$

Dan waktu untuk mencapai ketinggian maksimum ialah,

$$t_{maks} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g} \qquad (5)$$

Pendekatan Lagrangian dikembangkan oleh Joseph-Louis Lagrange pada abad ke-18, didasarkan pada konsep "fungsi lagrangian", yang merupakan representasi matematis dari energi kinetik dan energi potensial dari sutu objek. Pendekatan Lagrangian ini berguna dalam memahami gerak sistem dengan kendala seperti pendulum atau satelit yang mengorbit bumi.

Dalam hal ini pada tahap awal perlu mendefinisikan sistem Lagrangian yang mana merupakan fungsi yang menggambarkan energi kinetik dikurangi energi potensialnya (García-Garrido et al., 2020). Langrangian secara matematis didefinisikan sebagai $L = T - V$, dimana T merupakan energi kinetik dan V merupakan energi potensial terhadap sistem yang bersangkutan. Sehingga bentuk persamaan diferensialnya,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k \qquad (6)$$

Lagrangian tiga dimensi merupakan fungsi matematika dimana menggambarkan dinamika fisik dalam tiga dimensi. Lagrangian tiga dimensi didefinisikan sebagai perbedaan antara energi kinetik dan energi potensial dan digunakan untuk memperoleh persamaan gerak sistem. Hasil dari lagrangian tiga dimensi ialah persamaan gerak sistem yang menggambarkan bagaimana sistem itu akan berubah dari waktu ke waktu. Persamaan ini dapat digunakan dalam memprediksi perilaku sistem di masa depan, seperti posisi dan kecepatan suatu objek saat bergerak melalui ruang. Lagrangian tiga dimensi ini juga dapat dugunakan dalam menganalisis kestabilan sistem serta konservasi energi dan kuantitas lainnya. Lagrangian tiga dimensi merupakan alat yang ampuh dalam fisika dan teknik karena memungkinkan dalam memahami perilaku sistem fisik yang kompleks dalam tiga dimensi, dan banyak digunakan di berbagai bidang, termasuk mekanika klasik, mekanika kuantum, dan teori medan (Nasution et al., 2023).

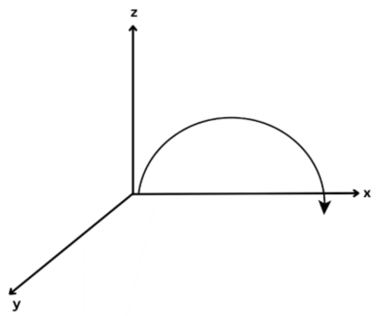
Lagrange Multiplier merupakan merupakan pengembangan dari hukum kedua Newton. Metode lagrange merupakan metode yang terdiri dari energi kinetik dan potensial. Posisi dan kecepatan merupakan perumusan yang digunakan dalam koordinatnya (Raniati et al., 2022). Kajian gerak peluru menggunakan lagrangian sangat penting digunakan dalam menganalisis gaya yang tidak memungkinkan. Gaya yang bervariasi dan arahnya yang berubah-ubah, serta sistem yang terdiri dari lebih dari satu objek sehingga tidak memungkinkan untuk menganalisis gayanya satu per satu. Formulasi lagrange sangat umum dan dapat diaplikasikan di koordinat apapun (diterapkan dimana-mana) (Rachmawati et al., 2022). Sehingga, dalam hal ini perlunya pengkajian gerak peluru menggunakan lagrangian.

METODE

Dalam penelitian ini digunakan kajian teoritik matematis dengan perhitungan numerik. Adapun pendekatan yang dilakukan ialah studi pustaka. Sumber-sumber berupa jurnal dengan topik yang relevan atau linier dengan judul penelitian berfungsi sebagai sumber data utama. Kajian ini bertujuan untuk mengambangkan pengetahuan matematis yang dibangun berdasarkan teori-teori yang sesuai dengan pokok bahasan. Melalui penelitian ini, diharapkan dapat dijadikan sebagai rujukan dan dikembangkan bagi peneliti selanjutnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil perhitungan gerak peluru khususnya pada persamaan Lagrangian dengan tiga sumbu (tiga derajat kebebasan) diperoleh hasil, yakni sebagai berikut.



$q = x, y, z$ (koordinat umum)

$\dot{q} = \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

Lagrangian pada gerak peluru/parabola,

Dengan energi kinetik (EK) ialah,

$$T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$$
$$= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Energi potensial (EP) ialah,

$$V = mgz$$

Sehingga untuk persamaan lagrangenya,

$$L = T - V$$
$$L = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - mgz$$

$$\boldsymbol{L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz} \qquad (7)$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$ ⟶ Persamaan diferensial

Untuk sumbu x,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Sehingga,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} = 0 \text{ (GLB)}$$

Untuk sumbu y,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Sehingga,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y}$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$\ddot{y} = 0 \text{ (GLB)}$$

Untuk sumbu z,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{\partial L}{\partial z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -mg$$

Sehingga,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{\partial L}{\partial z}$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

$\ddot{z} = -g$, dimana $\ddot{z} = \frac{dv}{dt}$

Maka,

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

$$\int dv = -g\, dt$$

$$V_z = -gt + C$$

$$V_z = -gt + v_{0z}$$

Pada saat t = 0

$V_0 = C$, maka diperoleh

$$\frac{dz}{dt} = -gt + V_{0z}$$

$$\int dz = \int -gt + V_{0z}\, dt$$

$$\boldsymbol{z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0z} + C} \qquad (8)$$

Pada saat t = 0 maka,

$$\boldsymbol{z = z_0 + V_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2} \qquad (9)$$

KESIMPULAN

Gerak peluru dengan tiga (3) sumbu atau tiga (3) derajat kebebasan dapat dikaji atau dianalisis menggunakan lagrangian, untuk gerak yang searah sumbu x dan sumbu y atau arah gerak horizontal dimana tidak terpengaruh oleh gaya gravitasi dan tidak memiliki percepatan sehingga mengalami gerak lurus beraturan (GLB). Dengan kata lain geraknya lurus beraturan dan kecepatan di semua titik konstan. Sedangkan pada sumbu z, dipengaruhi oleh gaya gravitasi sehingga mengalami gerak lurus berubah beraturan (GLBB).

REFERENSI

Abdullah, M. (2016). *Fisika Dasar I.* Kampus Ganesa Institut Teknologi Bandung.

García-Garrido, V. J., Agaoglou, M., & Wiggins, S. (2020). Exploring isomerization dynamics on a potential energy surface with an index-2 saddle using lagrangian descriptors. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *89*, 1–37. https://doi.org/10.1016/ j.cnsns.2020.105331

Harefa, D., Telaumbanua, T., Ge'e, E., Ndururu, K., Hulu, F., Marsa Ndraha, L. D., Ndruru, M., & Sarumaha, M. (2020). PELATIHAN MENENDANG BOLA DENGAN KONSEP GERAK PARABOLA. *Jurnal Pengabdi Kepada Masyarakat Universitas Pamulang (KOMMAS)*, *1*(3), 75–82.

Hirt, C., Claessens, S., Fecher, T., Kuhn, M., Pail, R., & Rexer, M. (2013). New ultrahigh-resolution picture of Earth's gravity field. *Geophysical Research Letters*, *40*(16), 4279–4283. https://doi.org/10.1002/grl.50838

Nasution, B., Lulut Alfaris, & Siagian, R. C. (2023). Basic Mechanics of Lagrange and Hamilton as Reference for STEM Students. *Jurnal Penelitian Pendidikan IPA*, *9*(2), 898–905. https://doi.org/10.29303/jppipa.v9i2.2 920

Pradhana, C. (2019). Efek Percepatan Gravitasi Pada Gerak Parabola. *Jurnal Teknologi Terapan: G-Tech*, *2*(2), 140–144. https://doi.org/10. 33379/gtech.v2i2.334

Purwadi, & Ishafit. (2014). Pemodelan Gerak Parabola yang Dipengaruhi Seretan serta Spin Efek Magnus Bola dengan Program Modellus dan Excell. *Jurnal Riset Dan Kajian Pendidikan Fisika (JRKPF)*, *1*(1), 11–18.

Rachmawati, S., Ibrahim, A. Z., Fajriani, S. P., & Febilioni, I. (2022). Kajian Gerak Jatuh Bebas dengan Persamaan Lagrangian & Newtonian sebagai Bahan Ajar Fisika Kelas X. *Mitra Pilar: Jurnal Pendidikan, Inovasi, Dan Terapan Teknologi*, *1*(2), 141–154. https://doi.org/10.58797/ pilar. 0102.07

Rajagukguk, J., & Sarumaha, C. (2017). PEMODELAN DAN ANALISIS GERAK PARABOLA DUA DIMENSI DENGAN MENGGU NAKAN APLIKASI GUI MATLAB. *Jurnal Saintika*, *17*(2), 63–68.

Raniati, Ariyanti, Y., Subekti, P., & Syahropi, H. (2022). Studi Literatur : Mekanika Lagrange. *Jurnal APTEK (Artikel Ilmiah Aplikasi Teknologi)*, *15*(1), 55–58.

Sari, S. R., & Prihanto, A. (2013). Simulasi Gerak Peluru Yang Dipengaruhi Gaya Hambat Udara Beserta Analisisnya Dengan Menggunakan Bahasa Pemrograman Delphi 7.0. *Inovasi Fisika Indonesia*, *2*(1), 1–5.